8. Распределения случайных величин-1

8.1. Предварительные сведения

Случайная величина — измеримая функция $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$, так что для любого борелевского множества B множество элементарных исходов $\{\omega : \xi(\omega) \in B\} \in \mathcal{F}$ (является событием).

Распределение случайной величины ξ — это мера, заданная соотношением $P_\xi(B) = \mathbb{P}(\xi \in B)$.

Функция распределения величины ξ — это функция $F_\xi(x) = \mathbb{P}(\xi < x)$.

Если $F_\xi(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} p_\xi(y)\,dy$, то функция $p_\xi(x)$ называется *плотностью*, а величина ξ — *абсолютно непрерывной.*

Если величина ξ принимает не более чем счетное число значений, то она называется *дискретной*. Распределение такой величины можно задать таблицей

ξ	x_1	$\ldots$	x_n	$\ldots$
$\mathbb{P}$	p_1	$\ldots$	p_n	$\ldots$

8.2. Практическое занятие

1. Распределение величины ξ определяется формулами $\mathbb{P}(\xi = k) = \frac{c}{k(k+1)}$, $k = 1, 2, \ldots$. Найти:

а) постоянную c;

б) $\mathbb{P}(\xi \leq 3)$;

в) $\mathbb{P}(n_1 \leq \xi \leq n_2)$.

Ответ. а) $c = 1$; б) $\frac{3}{4}$; в) $\frac{1}{n_1} - \frac{1}{n_2+1}$.

2. Если посетитель тира «Меткий стрелок» в 10 выстрелах поражает 10 мишеней, то ему выдаются еще 5 бесплатных пуль. Иван, который попадает в мишень с вероятностью 0.9, купил 10 пуль. Пусть ξ — число пораженных Иваном мишеней. Найти распределение ξ.

Ответ. $\mathbb{P}(\xi = k) = \begin{cases} C_{10}^k \cdot 0.9^k \cdot 0.1^{10-k}, & k = 0, 1, \ldots, 9, \\ C_5^{k-10} \cdot 0.9^k \cdot 0.1^{15-k}, & k = 10, 11, \ldots, 15. \end{cases}$

3. Плотность распределения величины ξ имеет вид $p_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x < 1, \\ c/x^4, & x \geq 1. \end{cases}$

Найти:

а) постоянную c;

б) функцию распределения F_ξ;

в) $\mathbb{P}(\xi = 2)$;

г) $\mathbb{P}(0.5 < \xi < 3)$;

д) $\mathbb{P}(0.1 < \eta < 0.3)$, где $\eta = 1/\xi$;

е) функцию распределения F_η и плотность p_η.

Ответ. а) $c = 3$; б) $F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \le 1, \\ 1 - x^{-3}, & x > 1; \end{cases}$ в) 0; г) 26/27; д) 0.026;
е) $F_\eta(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ x^3, & 0 < x \le 1, \\ 1, & x > 1; \end{cases}$ $p_\eta(x) = \begin{cases} 3x^2, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$

4. Пусть случайная величина ξ имеет плотность $p_\xi(x)$, функция g строго монотонна и дифференцируема. Доказать, что случайная величина $\eta = g(\xi)$ имеет плотность

$$p_\eta(y) = p_\xi(x) \left| \frac{1}{g'(x)} \right|, \quad \text{где } g(x) = y.$$

Как изменится формула, если предположить, что функция g дифференцируема за исключением конечного числа точек, и для любого y из множества значений функции g множество $\{x : g(x) = y\}$ конечно?

5. Величина ξ имеет распределение Коши с плотностью $p_\xi(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$. Найти плотность распределения величин $\eta = \frac{1}{\xi}$, $\zeta_1 = \frac{\xi^2}{1+\xi^2}$, $\zeta_2 = \frac{1}{1+\xi^2}$.

Ответ. $p_\eta = p_\xi$; $p_{\zeta_1}(x) = p_{\zeta_2}(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{x(1-x)}}$, $0 < x < 1$.

8.3. Домашнее задание

6. Распределение дискретной случайной величины ξ определяется формулами $\mathbb{P}(\xi = i) = 1/5$, $i = -2, -1, 0, 1, 2$. Найти распределения величин $\eta = -\xi$, $\zeta = |\xi|$. Построить графики функций распределения F_ξ, F_η, F_ζ. Обратите внимание, что $\xi \ne \eta$, но их распределения совпадают!

7. В пакете лежат 3 зеленых и 2 красных яблока. Пусть ξ — число яблок, вынутых наудачу из пакета, пока не попалось красное яблоко. Найти распределение случайной величины ξ и построить график функции распределения F_ξ, если

а) вынутые яблоки съедаются;

б) вынутые яблоки возвращаются обратно в пакет.

Ответ. а)

ξ	1	2	3	4
$\mathbb{P}$	0.4	0.3	0.2	0.1

; б) $\mathbb{P}(\xi = k) = \frac{2}{5} \cdot (\frac{3}{5})^{k-1}$, $k = 1, 2, \ldots$.

8. Величина ξ имеет экспоненциальное распределение с параметром $\alpha > 0$, т. е. $\mathbb{P}(\xi < x) = 1 - e^{-\alpha x}$, $x \ge 0$. Найти плотности распределения величин $\sqrt{\xi}$ и ξ^2.

Ответ. $2\alpha x e^{-\alpha x^2}$, $x \ge 0$; $\frac{\alpha}{2\sqrt{x}} e^{-\alpha\sqrt{x}}$, $x > 0$.

9. Пусть функция распределения $F(x)$ непрерывна. Доказать, что $F(x)$ равномерно непрерывна на множестве $\mathbb{R}$.